
Marko Pinterić

**UVOD U FIZIKU
S RIJEŠENIM ZADATCIMA**

1. izdanje

Zagreb, 2019.

© doc. dr. sc. Marko Pinterić, 2019.

Urednica

Sandra Gračan, dipl. ing.

Recenzenti

doc. dr. sc. Dario Hrupec
prof. dr. sc. Dubravko Horvat

Lektorica

Dunja Apostolovski, prof.

Slog, prijelom i crteži

doc. dr. sc. Marko Pinterić

Dizajn ovitka

Edo Kadić

Nakladnik

ELEMENT d.o.o., Zagreb, Menčetićeva 2
tel. 01/6008-700, 01/6008-701
faks 01/6008-799
www.element.hr
element@element.hr

Tisak

ELEMENT d.o.o., Zagreb

Sadržaj

I	Teorija i zadatci	1
1	Kinematika	3
1.1	Gibanje po pravcu	10
1.2	Višedimenzijnsko gibanje	13
1.3	Kruženje	15
2	Statika	17
2.1	Statika materijalne točke	23
2.2	Težište	29
2.3	Statika krutog tijela	30
2.4	Elastična svojstva tijela	34
3	Dinamika	35
3.1	Gibanje materijalne točke po pravcu	38
3.2	Kruženje materijalne točke	40
3.3	Vrtnja krutog tijela	42
4	Energija i rad	45
5	Zalet i zamah	51
6	Titranje i valovi	59
7	Mehanika fluida	69
8	Toplina i plinovi	73

II	Rješenja	81
1	Kinematika	83
1.1	Gibanje po pravcu	83
1.2	Višedimenzijско gibanje	100
1.3	Kruženje	113
2	Statika	121
2.1	Statika materijalne točke	121
2.2	Težište	144
2.3	Statika krutog tijela	146
2.4	Elastična svojstva tijela	163
3	Dinamika	167
3.1	Gibanje materijalne točke po pravcu	167
3.2	Kruženje materijalne točke	178
3.3	Vrtnja krutog tijela	186
4	Energija i rad	205
5	Zalet i zamah	225
6	Titranje i valovi	247
7	Mehanika fluida	259
8	Toplina i plinovi	271
	Bibliografija	285

I.

Teorija i zadatci

Težište i gustoća

Masa krutog tijela ukupne mase m raspodijeljena je u prostoru te je korisno definirati vektor položaja **centra mase**

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}, \quad \vec{r}_T = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm. \quad (2.2)$$

Vektor položaja centra mase u većini je tehničkih situacija (homogeno gravitacijsko polje) jednak vektoru položaja hvatišta sile gravitacije odnosno težine, nazvanom **težište**. Iako centar mase i težište nisu sinonimi mi ćemo za oboje u ovoj knjizi koristiti isti izraz – težište.

Pri proračunu težišta tijela upotrebljavamo veličine: gustoća ρ , plošna gustoća ρ_A i linijska gustoća ρ_l koje su za homogena tijela definirane kao

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.3)$$

$$\rho_A = \frac{m}{A} \quad (2.4)$$

$$\rho_l = \frac{m}{l}, \quad (2.5)$$

gdje l predstavlja duljinu jednodimenzijskog, A ploštinu dvodimenzijskog i V obujam trodimenzijskog tijela. Kod homogenih je tijela gustoća konstantna, pa se određivanje težišta bitno pojednostavljuje. Spomenimo i to da je kod homogenih i simetričnih tijela težište u geometrijskom središtu tijela.

Materijalna točka

Gibanje tijela opisuju **Newtonovi zakoni gibanja**.

Ravnotežu tijela određuje I. Newtonov zakon. U svojem izvornom obliku taj je zakon definiran za materijalnu točku, čije gibanje u potpunosti opisuje samo pomak. Zato ćemo ga u knjizi nazivati **I. Newtonov zakon za pomak**: ako (i samo ako) je rezultanta svih sila, koje djeluju na materijalnu točku, jednaka nuli, tijelo je u mirovanju ili se giba jednoliko pravocrtno

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{v} = \overline{\text{konst.}} \quad (2.6)$$

Taj zakon možemo upotrijebiti i za kruta tijela koja se ne vrte jer se tada javlja samo (paralelni) pomak, odnosno brzina svih dijelova tijela je jednaka.

Kruto tijelo

Kruto tijelo je idealizacija čvrstog tijela konačnih dimenzija pri kojem zanemarujemo deformacije. To znači da se udaljenost dviju proizvoljnih točaka tijela ne mijenja.

Općenito se pri krutom tijelu mogu pojaviti pomak (translacija) i vrtnja (rotacija). Tada gore napisan I. Newtonov zakon nije upotrebljiv jer različiti dijelovi tijela mogu imati različite pomake i brzine! Općenito, gibanje krutog tijela opisujemo kao kombinaciju pomaka težišta i vrtnje tijela oko osi kroz težište. Uzimajući u obzir da je zbroj unutrašnjih sila i unutrašnjih momenata sila jednak nuli, za općenitiji oblik I. Newtonova zakona dobivamo dva relativno jednostavna zakona.

I. Newtonov zakon za pomak težišta: ako (i samo ako) je rezultanta svih vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo jednaka nuli, težište tijela je u mirovanju ili se giba jednoliko pravocrtno

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{v}_T = \overline{\text{konst.}} \quad (2.7)$$

Ovaj se zakon naziva i **prvi uvjet statike**.


I. Newtonov zakon za vrtnju: ako (i samo ako) je rezultanta svih vanjskih momenata sila koje djeluju na kruto tijelo jednaka nuli, tijelo se ne vrti ili se vrti jednoliko

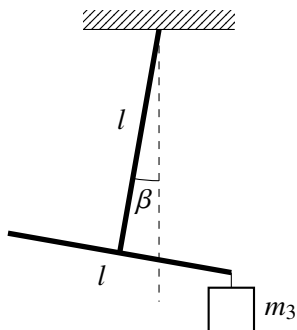
$$\sum \vec{M} = \vec{0} \iff \vec{\omega} = \overline{\text{konst.}} \quad (2.8)$$


Ovaj se zakon naziva i **drugi uvjet statike**. Jednostavno se može dokazati da je za statičke situacije izbor ishodišta za računanje momenata sila prozvoljan.

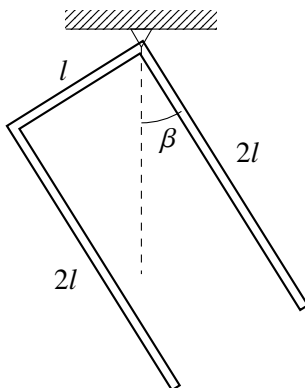
Za opis međusobnog djelovanja pojedinih tijela upotrijebimo **III. Newtonov zakon:** kad prvo tijelo djeluje na drugo silom \vec{F}_{12} , drugo tijelo djeluje na prvo silom istog iznosa i smjera ali suprotne orijentacije \vec{F}_{21}

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.9)$$

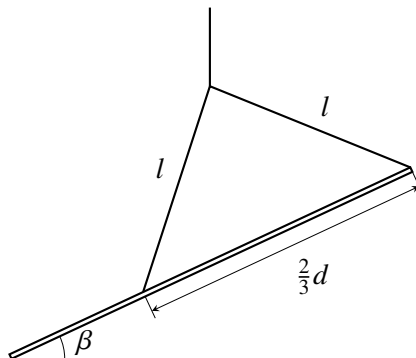
2.32  Viseća lampa u obliku slova T, čiji svaki element duljine $l = 1,0$ m ima masu $m_1 = 1,0$ kg, obješena je na strop. Uteg kolike mase m_3 moramo objesiti na jedan kraj viseće lampe da se ova nagne za kut $\beta = 10^\circ$ od vertikale, kao što prikazuje slika? (0,82 kg)



2.33  Slovo U, na slici, koje je napravljeno iz homogenog metalnog štapa konstantne ploštine poprečnog presjeka, ukupne duljine $5l = 1,00$ m i ukupne mase $m = 0,50$ kg, objesimo za jedno od tjemena. Za koliki se kut β slovo U otkloni od vertikale? (32°)



2.34 ⚙️ Nemaran radnik pričvrsti čelični nosač duljine $d = 4,5$ m i mase 1,0 t dvama jednako dugim čeličnim kablovima duljine $l = 2,2$ m na kraj nosača i na dvije trećine duljine nosača. Izračunajte za koliki se kut β na slici otkloni nosač s obzirom na horizontalu kad ga kran podigne. (25°)



2.4 Elastična svojstva tijela

2.35 U sredini 2,0 m duge žice ploštine poprečnog presjeka $1,0 \text{ mm}^2$, koja je na početku neopterećena i na krajevima pričvršćena horizontalno, objesimo uteg mase 10 kg. Pri tome se žica ulegne za 80 mm. Koliki je modul elastičnosti žice? ($2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$)

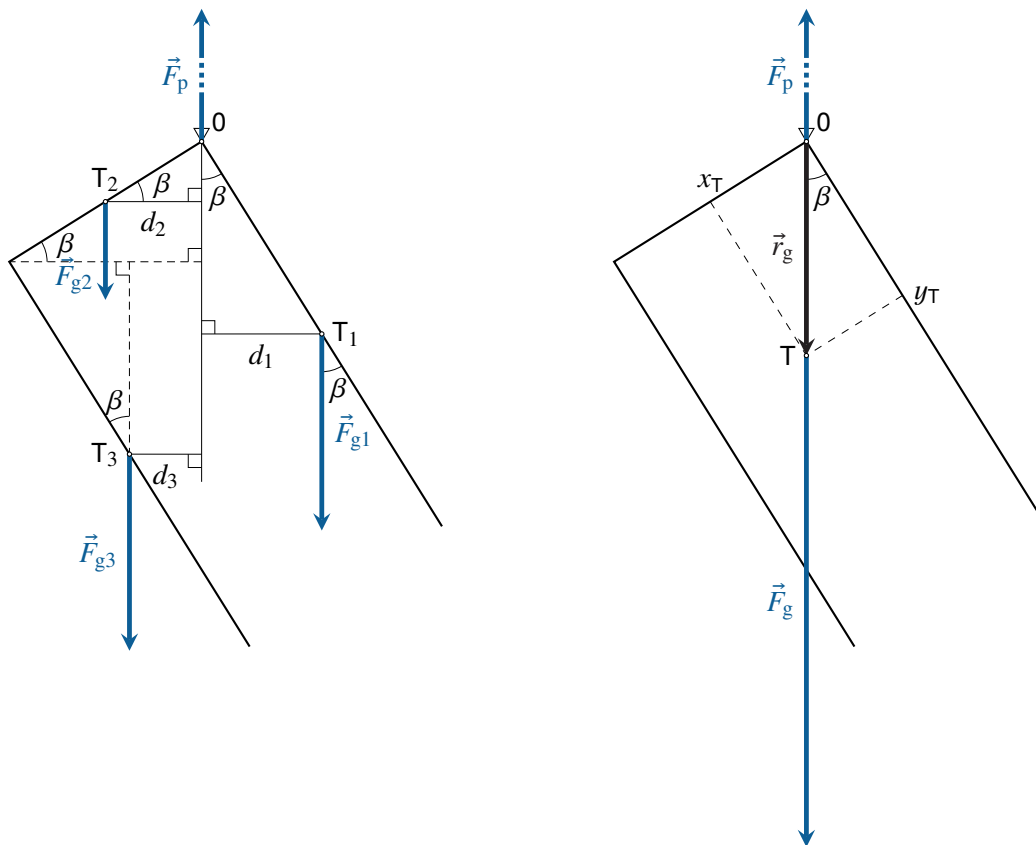
2.36 Žice duljina 1,0 m i ploština poprečnih presjeka $1,0 \text{ mm}^2$ od mjedi, čelika i željeza vežemo jednu na drugu. Jedan kraj tako sastavljene žice pričvrstimo na strop, dok na drugi kraj objesimo uteg mase 10 kg. Za koliko se produlji cijela žica? Moduli elastičnosti za mjed, čelik i željezo su redom $1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $1,5 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. Masu žica zanemarite. (2,17 mm)

2.37 Žice duljina 1,0 m i ploština poprečnih presjeka $1,0 \text{ mm}^2$ od mjedi, čelika i željeza s jedne strane pričvrstimo na strop, a s druge strane na njih objesimo uteg mase 10 kg. Za koliko se produlje žice ako su njihova produljenja jednaka? Moduli elastičnosti za mjed, čelik i željezo su redom $1,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, $2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ i $1,5 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. Masu žica zanemarite. (0,22 mm)

II.

Rješenja

2.33



Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

a. Težine u težištima pojedinih dijelova

Na slovo U (slika lijevo) djeluju tri težine pojedinih dijelova slova s hvatištima u njihovim težištima $F_{g1} = m_1g$, $F_{g2} = m_2g$ i $F_{g3} = m_3g$, te sila objesišta F_p . Mase pojedinih dijelova dobivamo uzimajući u obzir da su ploština poprečnog presjeka i

posljedično linijska gustoća ρ_l svih štapova konstantne (2.5)

$$\begin{aligned}\rho_l &= \frac{m}{5l} \\ m_1 &= \rho_l l_1 = \frac{m}{5l} 2l = \frac{2}{5}m \\ m_2 &= \rho_l l_2 = \frac{m}{5l} l = \frac{1}{5}m \\ m_3 &= \rho_l l_3 = \frac{m}{5l} 2l = \frac{2}{5}m.\end{aligned}$$

Za rješenje zadatka trebamo I. Newtonov zakon za vrtnju (2.8). Najbolji izbor ishodišta za računanje momenata sila je točka 0 odnosno hvatište sile objesišta F_p , koja nije zadana i koju ne trebamo. Tada zakon glasi

$$\sum M_0 = M_2 + M_3 - M_1 = d_2 F_{g2} + d_3 F_{g3} - d_1 F_{g1} = 0.$$

Iz geometrije sustava vidimo da su

$$d_1 = l \sin \beta, \quad d_2 = \frac{1}{2}l \cos \beta, \quad d_3 = l \cos \beta - l \sin \beta.$$

Konačno dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}l \cos \beta \frac{1}{5}mg + (l \cos \beta - l \sin \beta) \frac{2}{5}mg - l \sin \beta \frac{2}{5}mg &= 0 \\ \implies \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{5}{8} &\implies \beta = 32^\circ.\end{aligned}$$

b. Težina u zajedničkom težištu

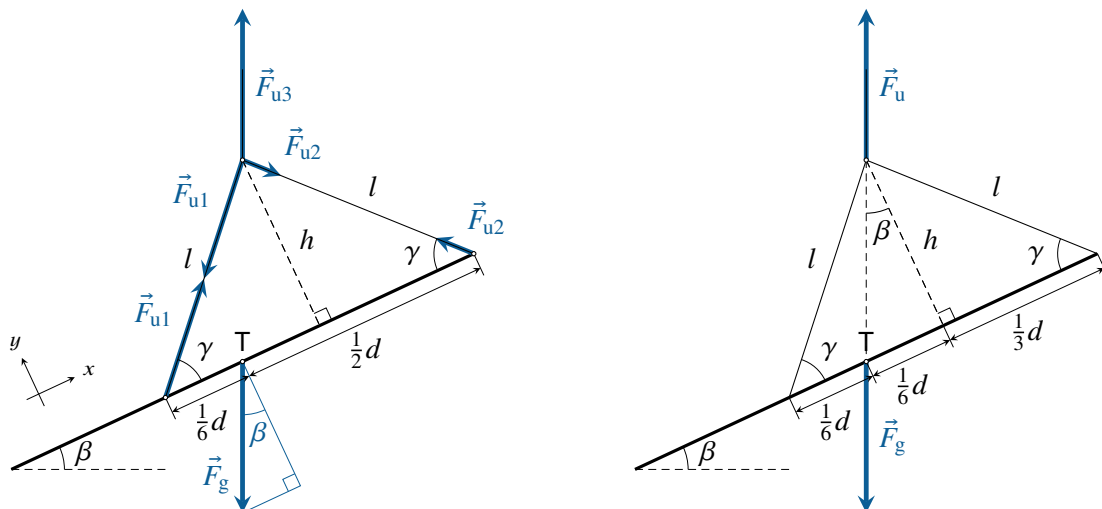
Zadatak možemo riješiti i tako da izračunamo težište slova U (slika desno), što smo već učinili u zadatku 2.20. Tada je težina ukupnog tijela skupljena samo u jednoj točki, pa na slovo U djeluju samo dvije sile, težina F_g i sila objesišta F_p . I. Newtonov zakon za vrtnju (2.8) zapišimo u objesištu 0 te dobivamo

$$\sum \vec{M} = \vec{r}_g \times \vec{F}_g = \vec{0}.$$

Jedina mogućnost da je gornji vektorski umnožak jednak nuli jest da su vektori \vec{r}_g i \vec{F}_g međusobno **usporedni**. Budući da je vektor \vec{F}_g vertikalna, možemo zaključiti da je **težište točno ispod objesišta**, dakle možemo zapisati

$$\tan \beta = \frac{x_T}{y_T} = \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{4}{5}l} = \frac{5}{8} \implies \beta = 32^\circ.$$

2.34



Zadatak ćemo riješiti na dva načina. Za oba načina trebat ćemo kut između čeličnog kabla i nosača γ

$$\cos \gamma = \frac{\frac{1}{3}d}{l} \implies \gamma = 47,01^\circ.$$

a. Sile na nosač

Na nosač djeluju težina $F_g = mg$ i dvije sile kablova F_{u1} i F_{u2} (slika lijevo). Za rješenje zadatka napišimo I. Newtonov zakon za vrtnju (2.8) oko osi kroz težište T

$$\sum M_T = \frac{1}{2}d F_{u2} \sin \gamma - \frac{1}{6}d F_{u1} \sin \gamma = 0 \implies F_{u1} = 3 F_{u2}$$

i I. Newtonov zakon za pomak težišta (2.7)

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_{u1} \cos \gamma - F_{u2} \cos \gamma - F_g \sin \beta = 0 \\ \sum F_y &= F_{u1} \sin \gamma + F_{u2} \sin \gamma - F_g \cos \beta = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih dviju jednadžbi izlučimo zadnje članove i međusobno ih podijelimo te dobivamo

$$\tan \beta = \frac{F_g \sin \beta}{F_g \cos \beta} = \frac{(F_{u1} - F_{u2}) \cos \gamma}{(F_{u1} + F_{u2}) \sin \gamma} = \frac{1}{2} \cot \gamma \implies \beta = 25^\circ.$$

b. Sile na sustav nosača i kablova

Zadatak možemo riješiti drukčije uzimajući u obzir, kao kod prethodnog zadatka, da je **težište točno ispod objesišta** (slika desno). Tada možemo napisati

$$\tan \beta = \frac{\frac{1}{6}d}{h}$$

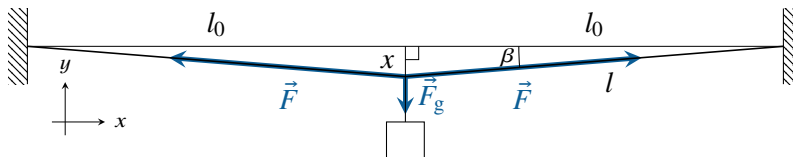
$$\tan \gamma = \frac{h}{\frac{1}{3}d}.$$

Iz gornjih dviju jednažbi izlučimo h te dobivamo

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \cot \gamma \implies \beta = 25^\circ.$$

2.4 Elastična svojstva tijela

2.35



Napomena: Radi preglednosti nacrtane su samo sile koje djeluju na polovici žice.

Budući da je žica na svojoj polovici savinuta, situaciju opišemo dvjema žicama ploštine poprečnog presjeka $A = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ i neopterećene duljine $l_0 = 1 \text{ m}$. Žice se zbog utega mase $m = 10 \text{ kg}$ produljuju do duljine l , što prouzrokuje ulegnuće $x = 0,08 \text{ m}$. Povećanje duljine svake žice dobivamo geometrijskim izračunom

$$\Delta l = l - l_0 = \sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0 = 3,195 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Produljenje žica prouzrokuje sila uzduž svake žice. Zapišimo I. Newtonov zakon za pomak (2.7) u y -smjeru u točki kontakta objiju žica

$$\sum F_y = 2F \sin \beta - F_g = 0$$

$$\implies F = \frac{F_g}{2 \sin \beta} = \frac{mg}{2 \frac{x}{l}} = \frac{mg \sqrt{l_0^2 + x^2}}{2x} = 627,0 \text{ N}.$$